# Hertentamen Dynamische Systemen I, 21/03/2002.

1. De *vlakke slinger* wordt gegeven door de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \text{ met } x \in \mathbb{S}^1 \ (= \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \text{ en parameter } \omega > 0.$$

   (a) Bepaal de evenwichten van dit systeem en hun stabiliteit.

   (b) Toon aan dat de evenwichten persistent zijn onder een storing van de vorm

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = \varepsilon g(x, \dot{x}, \varepsilon),$$

   voor een willekeurige $C^\infty$-functie $g$ en voldoend kleine storingsparameter $\varepsilon$. Zijn de stabiliteitstypen ook persistent?

   (c) Schets het faseplaatje van de vlakke slinger en geef daarin de invariante variëteiten van de zadelpunten (indien aanwezig) aan.

   (d) Bepaal de $\alpha$- en $\omega$-limietverzamelingen van de punten $(x, \dot{x}) = (0, 2\omega)$ en $(0, \omega)$.

2. De *logist* is de afbeelding gegeven door

$$f : x \mapsto \mu x(1-x), \text{ met } x \in [0,1] \text{ en parameter } \mu \geq 0.$$

   (a) Bepaal voor $\mu \in (0,4)$ de vaste punten van deze afbeelding, en hun stabiliteit.

   (b) Laat zien dat er voor $\mu \in (3,4)$ twee punten van priemperiode twee zijn, die voldoen aan de vergelijking

$$\mu^2 x^2 - (\mu^2 + \mu)x + \mu + 1 = 0.$$

   Welke bifurcatie treedt er op bij $\mu = 3$?

   (c) Toon aan dat $f^n(x) \to 0$ als $n \to +\infty$, voor alle $x \in [0,1]$ en $\mu \in [0,1)$.
   **Aanwijzing**: bewijs eerst dat $f(x) < x$ voor $x \neq 0$.

   (d) Neem nu $\mu > 5$. Laat $\Lambda \subset [0,1]$ de verzameling zijn van punten waarvan de voorwaartse baan geheel in $[0,1]$ ligt, d.w.z.

$$\Lambda = \bigcap_{k=0}^{+\infty} f^{-k}([0,1]).$$

   Toon aan dat $\inf_{x\in\Lambda} |f'(x)| > 1$ en dat $\Lambda$ een Cantorverzameling is.

(e) Hoeveel punten van priemperiode 12 bevat $\Lambda$?

3. Beschouw het vectorveld gegeven door de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + 2x - x\sqrt{x^2+y^2} + (\mu - 1)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} &= x + 2y - y\sqrt{x^2+y^2} + (\mu - 1)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned}$$

voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en parameter $\mu \in (-1, 1)$.

(a) Beschouw de Poincaré-afbeelding $P$ van dit systeem, gedefinieerd op de sectie $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Laat zien dat $P$ goed gedefinieerd is, en bepaal de vaste punten van $P$ en hun stabiliteit. **Aanwijzing**: gebruik poolcoördinaten. Het is niet nodig $P$ helemaal uit te rekenen!

(b) Schets faseplaatjes van de Poincaré-afbeelding en het vectorveld in alle kwalitatief verschillende gevallen, d.w.z. voor elke $\mu$ waar de stabiliteit van een vast punt verandert, en voor $\mu$ links en rechts van zo'n punt.

(c) Identificeer voor elke $\mu$ de attractors en repellors van dit systeem (zowel voor de afbeelding als voor het vectorveld).